

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XIX НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Т Е М А

за националния кръг на олимпиадата по астрономия

Теоретичен тур – 7 май 2016 г.

Възрастова група XI-XII клас – решения

1 задача. Космопорт. През 2066 г. в орбита около Земята е построена специална станция, от която се изстрелват космически кораби в далечни полети. Орбитата на станцията е кръгова екваториална и на височина 400 км над земната повърхност. Вие се намирате на борда на изследователски кораб, който също се движи по кръгова екваториална орбита, в същата посока като станцията, но на височина 380 км над земната повърхност. В момент на максимално сближаване на вашия спътник със станцията, от нея се изстрелва кораб в редовен рейс към Луната. Вие виждате блясъка от ракетните струи на неговите двигатели като звезда от звездна величина -12^m .

- А) Колко време след това за вас станцията Космопорт ще се скрие под хоризонта? Рефракцията да не се отчита.

- Б) Коментирайте качествено как рефракцията би повлияла върху описаната по-горе ситуация.

- В) Опитайте се да получите приблизителна количествена оценка за приноса на рефракцията.

- Г) Миг преди станцията да се скрие под хоризонта, от нея се изстрелва още един кораб и блясъкът от ракетните му струи е също толкова мощен, както и при първия кораб. Определете приблизително звездната му величина в този момент за вас. Ще можете ли да го видите?

Земната атмосфера поглъща част от светлината на небесните обекти. Когато обектът е в зенита, за наблюдател на земната повърхност неговата видима звездна величина се увеличава с 0.29^m . Слънцето в зенита има звездна величина -26.7^m , а на хоризонта – около -16^m .

Решение: Космическите апарати се движат по кръгови орбити. Затова те имат постоянна ъглова скорост. Разглеждаме движенията на платформата във въртяща се координатна система с начало в центъра на Земята и с ос свързана с космическия кораб. В тази система изоставането на платформата от космическия кораб се дължи на това, че тя се движи по орбита с по-голям радиус. Относителната ъглова скорост на кораба, спрямо платформата ще бъде:

$$\omega_0 = \omega_1 - \omega_2 = 2\pi \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

Реципрочните стойности на периодите изразяваме от третия закон на Кеплер:

$$\frac{1}{T_1} = \frac{\sqrt{\gamma M}}{2\pi} \cdot \frac{1}{r_1^{3/2}}$$

Оттук следва:

$$\omega_0 = \sqrt{\gamma M} \left(\frac{1}{r_1^{3/2}} - \frac{1}{r_2^{3/2}} \right)$$

Времето t_0 за завъртане на ъгъл 2α , при движение с ъглова скорост ω_0 е:

$$t_0 = \frac{2\alpha}{\omega_0}$$

Оттук следва:

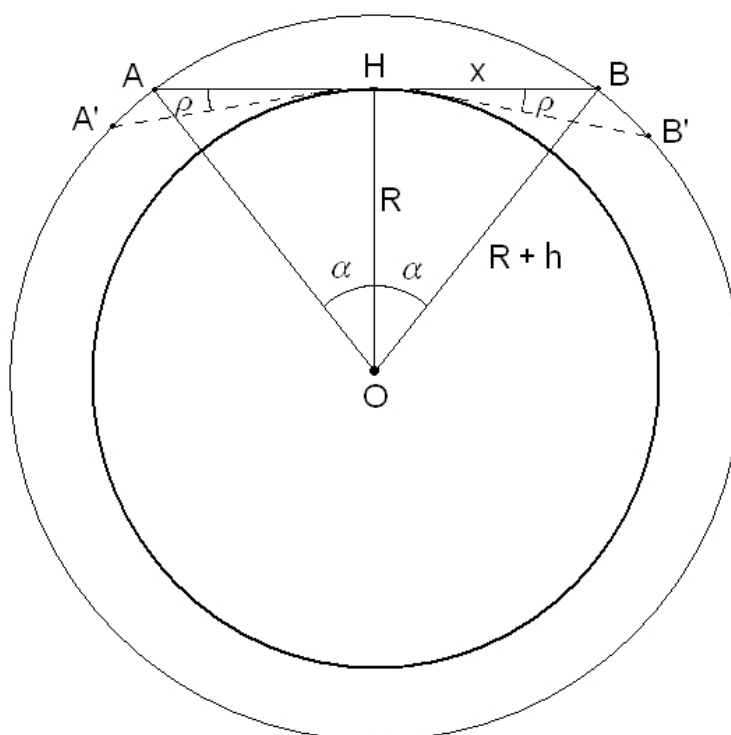
$$t_0 = \frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma M}} \frac{1}{\left(\frac{1}{r_1^{3/2}} - \frac{1}{r_2^{3/2}} \right)}$$

Тук $r_1 = R + h_1$, $r_2 = R + h_2$, където R е екваториалният радиус на Земята.

Ъгъл α получаваме от правоъгълните триъгълници, които виждаме на фиг.1:

$$\cos \alpha = \frac{R}{R + h_0}; \quad \alpha = \arccos\left(\frac{R}{R + h_0}\right)$$

Тук h_0 е средноаритметично от височините на двата космически апарата.



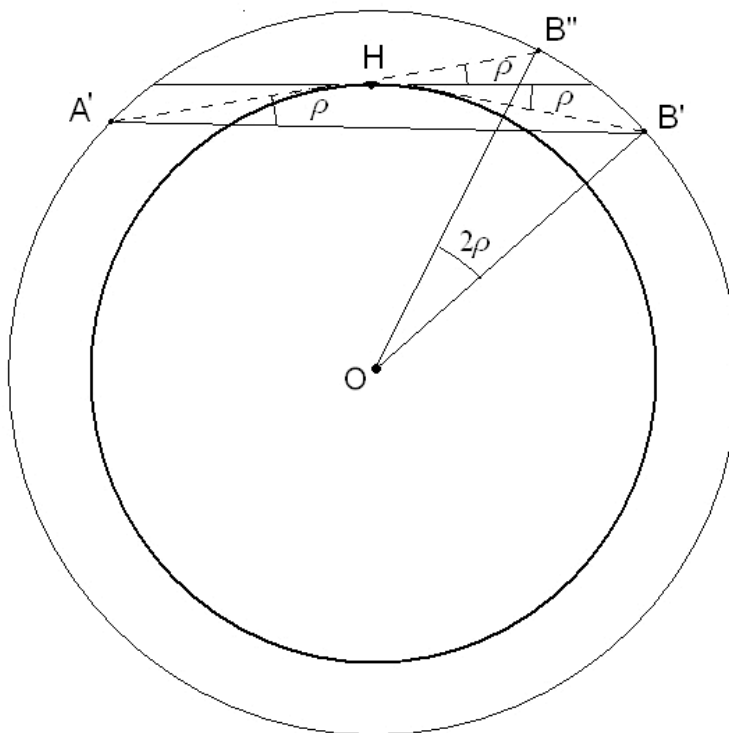
Фиг.1

Пресмятаме и получаваме $t_0 = 135454^s = 37.626^h = 1^d.5677 = 1^d 13^h 37^m 34^s$

Когато, обаче, отчетем атмосферата, ситуацията се променя. За наблюдател в точка **Н** на повърхността на Земята, платформата няма да залязва, когато се намира в точка **В**, а когато е в точка **В'**, под математическия хоризонт. Причината е в атмосферната рефракция, която е следствие от пречупването на светлината. Пречупването е следствие от това, че светлината се разпространява в атмосферата с по-малка скорост, която се променя непрекъснато, поради промяна в плътността и температурата на средата. Затова наблюдателят вижда обекти, които са по-ниско от математическия хоризонт. В разглеждания случай рефракцията действа два пъти, защото при преминаване над повърхността на Земята и отново през атмосферата, за да достигне до космическият кораб **А**, светлината се пречупва отново и може да бъде видяна от наблюдателите в космическия кораб, дори когато той е в точка **А'**. Ако

ъгълът на рефракция е $\rho = 35'$, то за наблюдател на космическия кораб преместването на космическата платформа ще бъде на двойно по-голям ъгъл $2\rho = 70'$. Това означава, че ще трябва да измине допълнителен интервал от време, докато космическата платформа действително бъде видяна на хоризонта.

Възможно е да направим количествена оценка на допълнителния ъгъл и на влиянието на рефракцията, използвайки някои приближения. Забелязваме, че точка **Н** се намира приблизително по средата на пътя на светлината от платформата към космическия кораб. Нека приемем, че след точка **Н**, до точка **А'**, където е космическият кораб, рефракцията е нулева, а цялата рефракция се реализира преди светлината да достигне т. **Н**. Тогава, относно наблюдател на Земята, платформата ще има двойна рефракция, както е означено на фиг.2.



Фиг.2

Двете положения на платформата **В'** и **В''** ще се виждат под ъгъл 2ρ . Понеже точка **Н** е приблизително по средата на пътя на светлината, то от точка **А'** дъгата **В'В''** ще се вижда приблизително под двойно по-малък ъгъл ρ . Но ъгълът **В'А'В''** е вписан ъгъл в окръжността на орбитата на кораба. Следователно централния ъгъл **В'ОВ''** е двойно по голям от него, т.е. е равен на 2ρ . Но това е ъгълът, под който се вижда допълнителната дъга, вследствие на рефракцията. Следователно към ъгъла **АОВ''** = 2α трябва да добавим ъгъл равен на 2ρ за да получим пълния ъгъл, на който трябва да се завърти платформата относно кораба, за да се скрие под хоризонта.

Добавяме ъгъла и получаваме:

$$t = t_0 \cdot \frac{(\alpha + \rho)}{\alpha} = 1.03 \cdot t_0 = 38^{\text{h}}.749$$

Сравнението със Слънцето ни показва, че когато едно небесно светило е на хоризонта, намаляването на неговия блясък поради атмосферното поглъщане може да се изрази като увеличение на звездната му величина с 10.7^{m} в сравнение с тази, която е имало в зенита при наблюдение от земната повърхност. Към това трябва да прибавим още 0.29^{m} , за да получим разликата между звездната величина на светилото, когато е на хоризонта и когато е изобщо извън атмосферата. Така за тази разлика получаваме около

11.0^m. Когато от нашия космически кораб наблюдаваме проблясъка от ракетните двигатели на кораба, изстрелван от станцията на хоризонта, обаче, ще трябва да удвоим този ефект, подобно на разглеждания при рефракцията на светлината. Оттук следва, че видимата звездна величина на проблясъка ще се увеличи с около 22^m.

Ще имаме и увеличение на видимата звездна величина поради факта, че ще наблюдаваме проблясъка от много по-голямо разстояние. Това разстояние ще бъде приблизително равно на отсечката АВ на Фиг.1. Нейната дължина е:

$$AB = 2HB = 2\sqrt{(R + h_0)^2 - R^2} \approx 4588 \text{ km}$$

При старта на първия кораб разстоянието, от което са били наблюдавани светещите ракетни струи, е било 20 км. От разстояние 4588 км, видимата звездна величина на това светене ще се увеличи. Можем да пресметнем това увеличение, като използваме факта, че видимият блясък е обратно пропорционален на квадрата на разстоянието до източника. Така за увеличението на звездната величина получаваме:

$$\Delta m = 2.5 \log \frac{AB^2}{(20 \text{ km})^2} \approx 11.8^m$$

Приблизително, звездната величина на проблясъка на хоризонта ще бъде 21.8^m.

Но само оценката на поглъщането на светлината е достатъчна да ни убеди, че видимата звездна величина на проблясъка от ракетните двигатели ще е далеч над граничната звездна величина на най-слабите звезди, които можем да виждаме с невъоръжено око.

Критерии за оценяване (общо 15 т.)

За правилен метод за определяне на времето, след което станцията ще се скрие под хоризонта – 4 т.

За правилен числен отговор – 1 т.

За правилен коментар относно влиянието на рефракцията – 2 т.

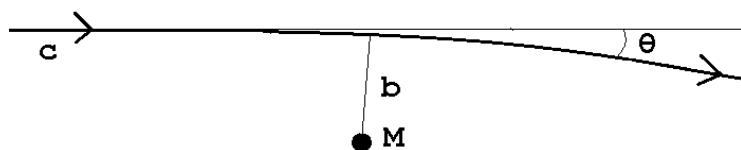
За правилен подход при числената оценка на ефекта от рефракцията 3 т.

За правилен числен отговор – 1 т.

За правилни разсъждения относно поглъщането на светлината, увеличаването на разстоянието и видимостта на проблясъка – 3 т.

За количествена оценка и заключение – 1 т.

2 задача. Гравитационна леща. Като ефект от Общата теория на относителността, при преминаване на минимално разстояние b от обект с маса M , светлинните лъчи се изкривяват на ъгъл $\theta[\text{rad}] = 4GM/(bc^2)$, където c е скоростта на светлината.



За да демонстрира това пред вас, астрономът Александър Куртенков избира двойната звезда Р, която се намира на разстояние 10.6 рс от Слънцето и има тангенциална скорост 13.86 km/s, насочена изцяло по ректасцензия, на запад. Тоест, ректасцензията на Р намалява поради собственото движение, а деклинацията не се променя. Орбитите на компонентите са кръгови и зрителният лъч лежи в равнината им. Орбиталният период е 10.0 h. Наблюдаваната разлика между лъчевите скорости на двете компоненти достига до максимална стойност 400 km/s.

- А) Пресметнете общата маса на системата Р в слънчеви маси.
- Б) Пресметнете собственото движение (ъгловата скорост спрямо звездите) на системата Р в ъглови секунди на година.

• В) На 15.07.2016 г. Р има екваториални координати ($\alpha_P = 18^h 01^m 10^s.1261$, $\delta_P = -23^\circ 26' 38''.610$), а звездата Q – ($\alpha_Q = 18^h 01^m 10.0772^s$, $\delta_Q = -23^\circ 26' 38''.661$). Международен екип от учени, ръководен от А. Куртенков, планира да провери гореописания ефект от Общата теория на относителността, извършвайки свръхточни наблюдения на Р и Q с оптичен интерферометър. Планирани са наблюдения на 06.09.2018 г. Пресметнете очакваните екваториални координати на Q на тази дата с възможно най-висока точност! Звездата Q е на много голямо разстояние (над 500 pc) и има пренебрежимо собствено движение.

Тангенциалната скорост е компонентата на скоростта, перпендикулярна на зрителния лъч. Екваториалните координати се пресмятат спрямо астрометрични стандарти и не се влияят от аберацията на светлината!

Решение:

А) Орбиталният период на двойната звезда е $T=10$ h. Зрителният лъч лежи в равнината на орбитите, т.е. максималната разлика в лъчевите скорости $v = 400 \text{ km/s}$ е равна на кръговата скорост по относителната орбита (на едната компонента спрямо другата). Радиусът r на относителната орбита може да бъде намерен от съотношенията:

$$2\pi r = vT \quad \Rightarrow \quad r = vT/(2\pi) = 2.292 \times 10^6 \text{ km}$$

Масата M на системата намираме от III закон на Кеплер:

$$r^3/T^2 = GM/(4\pi^2) \quad \Rightarrow \quad M = 2.749 M_\odot \text{ (слънчеви маси)}$$

Б) Собственото движение μ по абсолютна стойност е тангенциалната скорост ($v_T = 13.86 \text{ km/s}$), разделена на разстоянието ($d=10.6 \text{ pc}$):

$$\mu = v_T/d$$

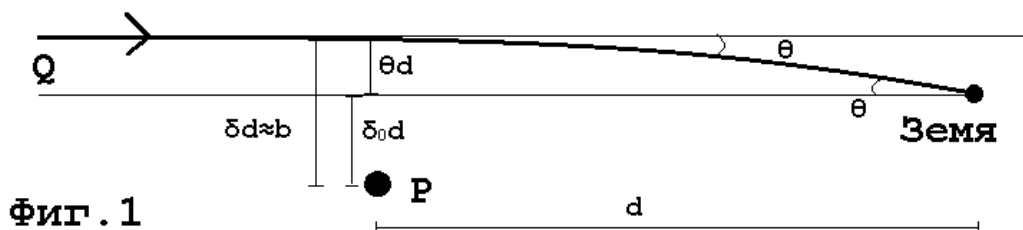
Ако v_T е в km/s , а d – в km , получаваме μ в rad/s . След превръщане се получава:

$$\mu = 0.275 \text{ ''/yr}$$

В) Първо, ще разглеждаме двойната система Р като единичен масивен обект с маса $2.749 M_\odot$, тъй като разстоянието, на което наблюдаваните лъчи от Q преминават относно Р е $b \gg r$. Звездата Q е на много голямо разстояние, затова спрямо системата Р и наблюдателя лъчите от Q са успоредни, а паралаксът $\pi_Q = 0.002''$ е пренебрежим.

Нека δ е наблюдаваното ъглово разстояние между Р и Q, а δ_0 е ъгловото разстояние, такова каквото то би било, ако масата на Р не изкривяваше пътя на светлината от Q и светлината се движеше по права. От фиг.1 се вижда, че отклонението на видимото положение на Q по небето, причинено от масата на Р, също е ъгъл θ (двата ъгъла θ , отбелязани на чертежа, са кръстни). Тогава $\delta = \delta_0 + \theta$ и $b = (\delta_0 + \theta)d$. Следователно:

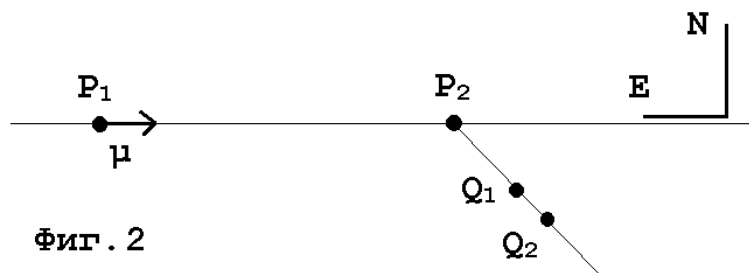
$$\theta = 4GM/((\delta_0 + \theta)dc^2) \Rightarrow (\delta_0 + \theta)\theta = 4GM/(dc^2) = 2.114 \times 10^{-3} \text{ arcsec}^2$$



Намираме ъгловото разстояние δ_1 между Р и Q на 15.07.2016:

$$\delta_1^2 = (\alpha_P - \alpha_Q)^2 (\cos \delta_P)^2 + (\delta_P - \delta_Q)^2$$

$\delta_1 = 0.675'' \Rightarrow$ Отклонението на положението на Q, причинено от гравитационното влияние на Р е $\theta_1 = 0.003''$ и е почти пренебрежимо.



Фиг. 2

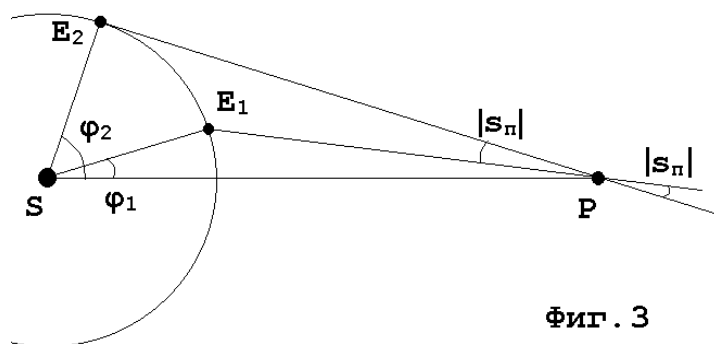
На фиг. 2 са показани схематично положенията на двете звезди на 15.07.2016 (P_1 и Q_1) и на 06.09.2018 (P_2 и Q_2). Видимото отместване на P на фона на звездите е суперпозиция от два ефекта: собственото движение и паралактичното отместване. По условие собственото движение е изцяло насочено по ректасцензия, т.е. има компоненти $(\mu_\alpha \cos \delta, \mu_\delta) = (-0.275, 0)$ "/уг.

Забелязваме, че двете звезди се намират почти точно в точката на зимното слънцестоене. Тъй е на еклиптиката, P ще се отмества паралактично успоредно на нея, по права. В точката на зимното слънцестоене линеен елемент на еклиптиката е успореден на небесния екватор, т.е. паралактичното отместване на P също ще е изцяло по ректасцензия. Следователно P ще се движи изцяло по ректасцензия.

Нека да намерим ъгловото отместване по ректасцензия $s = P_1 P_2$. То ще е $s = s_\mu + s_\pi$, където s_μ е отместването, породено от собственото движение, а s_π е паралактичното отместване. Времето между двете наблюдения е $\Delta t = 2 \text{ yr } 53 \text{ d} = 2.145 \text{ yr}$
 $s_\mu = \mu_\alpha \cos \delta \cdot \Delta t = -0.590''$

На фиг.3 са отбелязани положенията на Земята в моментите 1 и 2. Видно е, че звездата P е отместена на запад, затова отместването s_π е отрицателно. Ъгълът, съответстващ на $|s_\pi|$, е отбелязан на чертежа. Моментите 1 и 2 са съответно 24 d и 87 d след лятното слънцестоене, когато P се е намирала на 180° от Слънцето. Земята изминава по орбитата си $360/365.25 = 0.986$ градуса на ден $\Rightarrow \varphi_1 = 23.6^\circ$, $\varphi_2 = 85.7^\circ$. От геометрични съображения отместването е:

$|s_\pi| = 1 \text{ AU} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) / d = \pi_P (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$,
 където $\pi_P = 1/d [\text{pc}] = 0.0943''$. От тук $s_\pi = -0.0563''$



Фиг. 3

Цялото отместване по ректасцензия от P_1 до P_2 (фиг. 2) е:

$$s = s_\mu + s_\pi = -0.646''$$

Разликата в ректасценциите в момент 1 съответства на ъгъл

$$(\alpha_P - \alpha_Q)(\cos \delta_P) = 0.673''$$

Разликата в ректасцензиите на P_2 и Q_1 е намаляла до $\Delta \alpha = 0.673'' + s = 0.027''$

Разликата в деклинациите на P_2 и Q_1 все още е $\Delta \delta = \delta_P - \delta_Q = 0.051''$

Но заради изкривяването на светлинните лъчи около звездата P звездата Q вече се наблюдава в точка Q_2 , право навън от P_2 на фиг.2. Ъгловото разстояние между P_2 и Q_1 е $\delta_0 = (\Delta \alpha^2 + \Delta \delta^2)^{1/2} = 0.058''$.

Полагаме $u = 4GM/(dc^2) = 2.114 \times 10^{-3} \text{ arcsec}^2$ и

$$(\delta_0 + \theta)\theta = u \Rightarrow \theta^2 + \delta_0\theta - u = 0$$

Квадратното уравнение има решение при $\theta = 0.025''$. Това е отместването на видимото положение на звездата Q, причинено от гравитацията на звездата P, която преминава близо до правата Земя-Q. Екваториалните компоненти на отместването са:

$$\theta\alpha = -\theta(\Delta\alpha/\delta_0) = -0.0117''$$

$$\theta\delta = -\theta(\Delta\delta/\delta_0) = -0.0222''$$

Отместване от $-0.0117''$ по ректасцензия съответства на разлика в ректасцензиите:

$$-0.0117''/(15\cos\delta_P) = -0.0009 \text{ s}$$

Нанасяйки тези корекции върху координатите на Q1, получаваме координати за Q2:

$$\alpha_{Q2} = 18^h 01^m 10.0763^s$$

$$\delta_{Q2} = -23^\circ 26' 38''.683$$

Даденото решение е с точност $0.003''$, тъй като пренебрегваме изкривяването на светлината в момент 1.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

Правилен чертеж (фиг. 2) или описание на ефекта: 3т.

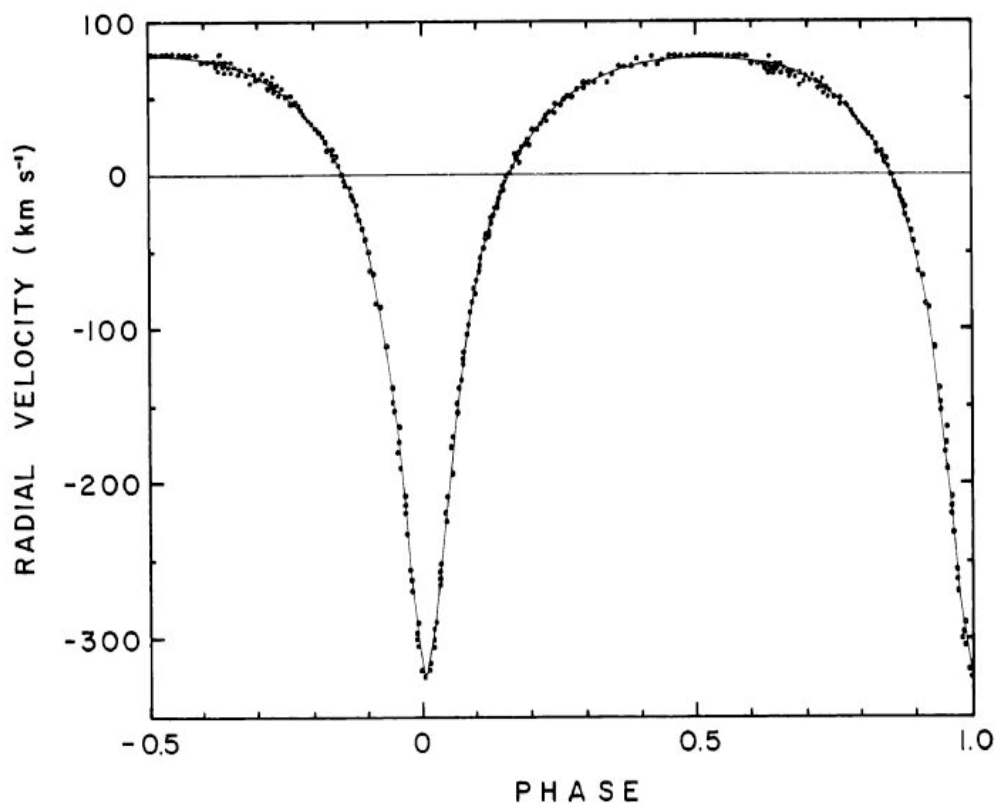
Правилно отчитане на паралактичното отместване (фиг. 3): 2т.

Пресмятане на ъгъла на отместване θ и отговор (+фиг. 1): 10 т.

3 задача. Двойна неутронна звезда. Пулсарът PSR B1913+16 е открит през 1974 г. с радиотелескопа Аресибо. Той е компонента в тясна двойна система с период 7.75 часа. Предполага се, че другата компонента е също неутронна звезда и че масите на двете компоненти са приблизително равни.

- Оценете стойността на тези маси като използвате данните от кривата налъчевата скорост на пулсара.

На графиката е дадена лъчевата скорост на пулсара относно центъра на масите на системата. Орбиталната равнина на двойната система е наклонена на 43° спрямо зрителния лъч от нас към нея.



Решение:

Отначало нека да предположим, че зрителният лъч от нас към пулсара лежи в неговата орбитална равнина и че е перпендикулярен на голямата ос на елиптичната му орбита. Тогава максимумите в кривата ще отразяват моментите, когато пулсарът е преминавал през апоцентъра на орбитата си и съгласно втория закон на Кеплер, скоростта му е била минимална. Измерваме височината на един максимум над нулевото равнище и получаваме 16 мм. Като използваме мащаба на скалата на скоростта пресмятаме, че скоростта на пулсара в апоцентъра на орбитата му е $v_a \approx 78.7 \text{ km/s}$. Минимумите съответстват на най-голяма по абсолютна стойност скорост на движение на пулсара и това е скоростта му в перицентъра. Измерваме дълбочината на минимумите от нулевото ниво и получаваме 67 мм. Като използваме мащаба намираме, че скоростта на пулсара в перицентъра е $v_p \approx 329.5 \text{ km/s}$. Това е впечатляваща скорост, която е равна на 0.1% от скоростта на светлината.

Да разгледаме относителното движение на пулсара в координатна система, в която другата компонента е неподвижна. Той ще описва около нея елиптична орбита, която ще наричаме относителна орбита. Понеже се приема, че двете компоненти са с почти еднакви маси M , то относителните скорости на пулсара в перицентъра и апоцентъра ще бъдат двойно по-високи от тези, които пресметнахме. Да означим с $v_p = 329.5 \times 2 = 659 \text{ km/s}$ и $v_a = 78.7 \times 2 = 157.4 \text{ km/s}$ скоростите на пулсара в перицентъра и апоцентъра на относителната орбита, с r_p и r_a – съответно разстоянието от пулсара до другата звезда в перицентъра и в апоцентъра, с a голямата полуос на относителната орбита, а с v_0 скоростта на движение на пулсара в точките от орбитата, които са крайща на малката ѝ ос (това е кръговата скорост при движение по орбита с радиус, равен на a). Известно е, че:

$$v_0 = \sqrt{\frac{\gamma \cdot 2M}{a}}$$

Тук записваме за масата $2M$, понеже това е сумата от масите на двете компоненти. За всички тези величини можем да напишем закона за запазване на енергията:

$$\frac{v_p^2}{2} - \frac{\gamma \cdot 2M}{r_p} = -\frac{\gamma \cdot 2M}{2a}$$
$$\frac{v_a^2}{2} - \frac{\gamma \cdot 2M}{r_a} = -\frac{\gamma \cdot 2M}{2a}$$

Също така, съгласно втория закон на Кеплер:

$$v_p r_p = v_a r_a$$

Като преобразуваме всички тези уравнения и изключим от системата някои неизвестни величини, получаваме следната зависимост:

$$v_0 = \sqrt{v_a v_p}$$
$$v_0 \approx 322.1 \text{ km/s}$$

Това е скоростта, с която пулсарът би се движил по кръгова орбита с радиус, равен на голямата полуос a , при това със същия период. Следователно вече можем да намерим стойността на a от простото съотношение:

$$2\pi a = v_0 T$$
$$a = \frac{v_0 T}{2\pi}$$
$$a \approx 1.43 \times 10^6 \text{ km}$$

Двете компоненти са отдалечени една от друга на разстояние, приблизително колкото диаметъра на нашето Слънце.

Известен ни е и орбиталният период на пулсара T . Можем да го включим в третия закон на Кеплер:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma \cdot 2M}{4\pi^2}$$

От него накрая можем да намерим търсената маса:

$$M = \frac{2\pi^2 a^3}{\gamma T^2}$$

$$M \approx 1.11 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Полученият резултат е малко повече от половин слънчева маса, което е твърде малко за една неутронна звезда. Нека си спомним, обаче, че равнината на орбитата на пулсара е наклонена към зрителния лъч на ъгъл 43° . Не ни е известно как направлението на този наклон е ориентирано спрямо осите на елиптичната орбита. Във всеки случай наблюдаваните и отразени в графиката скорости са проекции на истинските и следователно са по-малки от тях. Това е причината да получим доста подценена стойност на масата на пулсара. Да приемем, че елипсата е завъртяна на дадения ъгъл на наклон около своята голяма ос. Тогава действителната кръгова скорост на пулсара ще бъде $1/\cos 43^\circ \approx 1.367$ по-висока. От нея ние намерихме голямата полуос на орбитата и я използвахме в третия закон на Кеплер, където тя е на трета степен. Следователно получената стойност за масата на пулсара ще следва да се умножи с числото $1.367^3 \approx 2.556$ и ще стане: $M \approx 2.84 \times 10^{30} \text{ kg} \approx 1.42$ слънчеви маси. Това вече е съвсем правдоподобна стойност за масата на една неутронна звезда.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За правилно тълкуване на графиката, измерване и получаване на скоростите в перицентъра и апоцентъра – 4 т.

За правилен метод на определяне на масата, формули и разсъждения – 4 т.

За алгебрични пресмятания – 3 т.

За правилен числен резултат – 1 т.

За опит за отчитане на ъгъла на наклон на орбитата – 2 т.

За краен извод относно достоверността на резултата – 1 т.

Справочни данни:

Гравитационна константа $6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

Маса на Слънцето $1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

Маса на Земята $6 \times 10^{24} \text{ kg}$

Екваториален радиус на Земята 6378 km

Рефракция на хоризонта $35'$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XIX НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Т Е М А

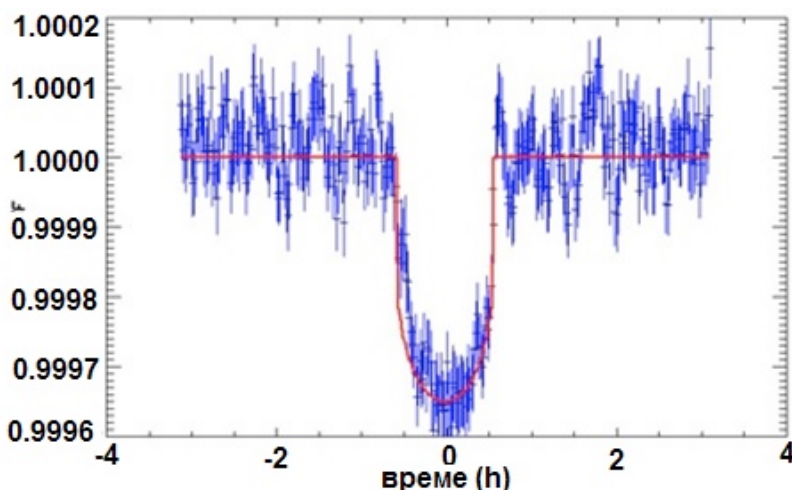
за националния кръг на олимпиадата по астрономия

Практически тур – 8 май 2016 г.

Възрастова група XI-XII клас – решения

1 задача. **Екзопланетата COROT 7b.** COROT 7b е една от първите открити екзопланети, които имат размери, съпоставими с тези на Земята. Намира се в съзвездието Еднорог, на разстояние 500 ly от Земята. Планетата обикаля по кръгова орбита около звездата COROT-7, която принадлежи на Главната последователност и спектралният ѝ клас е G9V (температура 5 250K). Видимата звездна величина на звездата е 11.67^m.

Планетата COROT 7b е открита с космическия телескоп COROT, изстрелян съвместно от френската космическа агенция (CNES) и Европейската космическа агенция (ESA). На Фиг. 1. е дадена кривата на блясъка на звездата по време на пасаж (преминаване) на планетата пред диска на звездата. Можем да считаме, че зрителният лъч лежи точно в орбиталната равнина на планетата. По ординатната ос е нанесен относителен светлинният поток, а не звездна величина. Той се приема за равен на 1.0000 извън времето на пасажа на планетата.



Фиг. 1

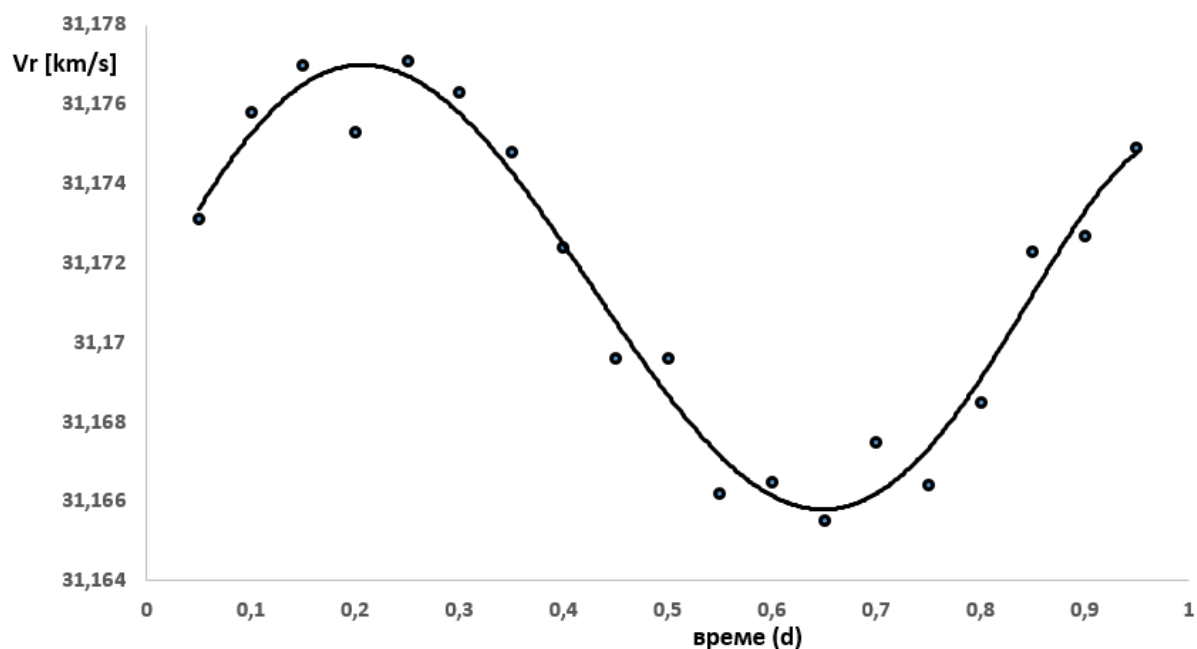
С помощта на спектрографа HARPS, монтиран на 3.6-метровия телескоп в Южноевропейската обсерватория в Чили е получено изменението на лъчевата скорост на звездата COROT-7. В таблицата, подготвена от астронома Никола Каравасилев, са дадени съответните стойности за различни моменти от време, като е направена корекция за движението на Земята около Слънцето. Промяната на лъчевата скорост на звездата се дължи на гравитационното въздействие на планетата COROT-7b.

- А) Постройте крива на лъчевата скорост на звездата COROT-7. Определете скоростта, с която тя се движи около общия център на масите с планетата.
- Б) Определете отношението на радиусите на планетата и звездата, след което намерете радиуса на COROT-7b.
- В) Пресметнете масата на планетата, а след това и нейната плътност. Към кой клас планети бихме могли да считаме, че тя принадлежи?
- Г) Коментирайте точността на получените от Вас резултати и факторите, които влияят върху нея.

N	t [дни]	Vr [km/s]
1	0,05	31,1731
2	0,10	31,1758
3	0,15	31,177
4	0,20	31,1753
5	0,25	31,1771
6	0,30	31,1763
7	0,35	31,1748
8	0,40	31,1724
9	0,45	31,1696
10	0,50	31,1696
11	0,55	31,1662
12	0,60	31,1665
13	0,65	31,1655
14	0,70	31,1675
15	0,75	31,1664
16	0,80	31,1685
17	0,85	31,1723
18	0,90	31,1727
19	0,95	31,1749

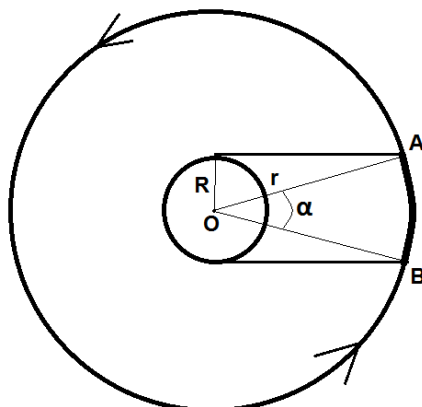
Решение:

Постояваме графика на изменението на лъчевата скорост.



Средната лъчева скорост, отчетена от графиката, е равна на $V_{cp} = 31.17 \text{ km/s}$. Това е скоростта, с която се движи центърът на масите на планетната система, по направление на зрителния лъч, относно Слънцето. Амплитудата на кривата на лъчевите скорости, получена от графиката, е $V = 5.7 \text{ km/s}$. Това е и орбиталната скорост на звездата около центъра на масите.

По рязкото спадане и издигане на блясъка на звездата в началото и края на пасажа съдим за това, че радиусът на планетата е много по-малък от радиуса на звездата. Затова за нашите оценки може да приемем, че планетата е точков обект. За времето на пасажа планетата изминава дъгата АВ, обозначена на фиг.1.:



Дъгата се вижда от центъра на звездата под ъгъл α . От схемата следва, че:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R}{r}$$

където R е радиусът на звездата, а r е радиусът на орбитата на планетата.

От кривата на лъчевите скорости намираме моментите, в които лъчевата скорост е максимални и минимална: $t_{\max} = 0^{\text{d}}.2$, $t_{\min} = 0^{\text{d}}.64$. Те съответстват на моментите, в които звездата се движи по направление на лъча на зрение – по посока от нас и към нас, съответно. В случая на кръгова орбита двата момента се намират точно на половин период отстояние един от друг. Следователно периодът на планетата е приблизително $T = 0^{\text{d}}.88$. Времето, за което планетата изминава дъгата АВ, отнесено към периода на звездата, е равно на отношението на ъгъл α към 360° .

$$\frac{t}{T} = \frac{\alpha}{360^{\circ}}$$

От двете формули изразяваме r :

$$r = \frac{R}{\sin\left(\frac{180 \cdot t}{T}\right)}$$

Тук t е времето за изминаване на дъгата АВ. Това време е равно на продължителността на пасажа. От кривата на блясъка на звездата намираме тази продължителност и тя е приблизително равна на $t \approx 80 \text{ min}$. Радиуса на звездата намираме от таблицата с астрофизичните характеристики на звезди от различни спектрални класове. Радиусът, съответстващ на спектралния клас и температурата на звездата, е $R = 0.82R_{\text{Sol}}$. Радиусът на Слънцето е $700\,000 \text{ km}$. Пресмятаме и получаваме $R = 574\,000 \text{ km}$.

Пресмятаме радиуса на орбитата по горната формула и получаваме:

$$r \approx 2.9 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

Орбитата е кръгова, затова може да намерим орбиталната скорост на планетата:

$$V_{Pl} = \frac{2\pi r}{T} = 241 \text{ km/s}$$

Пак от таблицата с астрофизичните характеристики на звездите намираме, че масата на звездата трябва да е $M = 0.9M_{\text{Sol}}$. От закона за запазване на импулса, на системата звезда – планета, следва:

$$M \cdot V = M_{Pl} \cdot V_{Pl}$$

Пресмятаме масата на планетата:

$$M_{Pl} = M \cdot \frac{V}{V_{Pl}} = 2.16 \cdot 10^{-5} M_{Sol} \approx 4.34 \cdot 10^{25} \text{ kg}$$

Намаляването на потока се дължи на това, че дискът на планетата засенчва част от диска на звездата. Отношението на потоците е равно на отношението на площта на диска на звездата минус площта засенчена от планетата, и площта на диска на звездата, когато е незасенчена от планетата.

$$\frac{S_* - S_{Pl}}{S_*} = \frac{R_*^2 - R_{Pl}^2}{R_*^2} = \frac{\Phi - \Delta\Phi}{\Phi} = 0.99965$$

където Φ и $\Delta\Phi$ са потокът от звездата и потокът от засенчената част на звездата. Оттук намираме радиуса на планетата: $R_{Pl} \approx 0.0187 \cdot R_* \approx 10700 \text{ km}$.

Малкият размер на планетата, сравним с размерите на Земята, позволява да отнесем планетата към т.нар. планети “суперземи”, а малкото разстояние до звездата ни позволява да я наричаме “гореща суперземя”.

Плътноста на планетата е:

$$\rho = \frac{3M_{Pl}}{4\pi R_{Pl}^3} \approx 8360 \text{ kg/m}^3$$

Това е много голяма плътност, 1.5 пъти по-голяма от средната плътност на Земята. Може да очакваме COROT-7b да съдържа голямо количество тежки елементи, примерно желязо и никел. В нашата слънчева система Меркурий има голямо желязно ядро, но плътността му е съществено по-ниска от плътността на COROT-7b.

Относно точността на нашите пресмятания може да се каже, че върху тях влияят следните фактори:

- Точността, с която измерваме понижаването на блясъка по време на пасажа, както и продължителността на пасажа;
- Точността, с която измерваме амплитудата на получената от нас крива на лъчевите скорости, както и периода на планетата. Точките на графиката не лежат на една идеална крива, поради което от там може да се появи някакво отклонение.

Затова точността на получените числени данни не може да очакваме да е по-добра от няколко процента.

Критерии за оценяване (общо 13 т.)

За построяване на кривата на лъчевите скорости, намиране на лъчевата скорост на системата и орбиталната скорост на звездата – 3т.

За определяне на радиусите на звездата и планетата и класифициране на планетата като “суперземя” – 6т.

За намиране на масата и плътността на планетата – 3т.

За коментар на точността и източниците на грешки – 1т.

2 задача. Сезони. Ветровитата планета се движи около своето слънце по орбита със значителен ексцентрицитет. Орбиталният ѝ период е 400 дни. Оста на въртене на планетата е наклонена на 30° спрямо вертикалата към равнината на нейната орбита. Лятното слънцестояние за северното полукуълбо се случва при преминаването на планетата през перихелия на орбитата. Даден ви е чертеж на елиптичната орбита на Ветровитата планета.

- А) Отбележете на чертежа положенията на планетата при пролетно и есенно равноденствие, лятно и зимно слънцестояние за жител на северното полукуълбо. Опишете накратко нейните сезони.

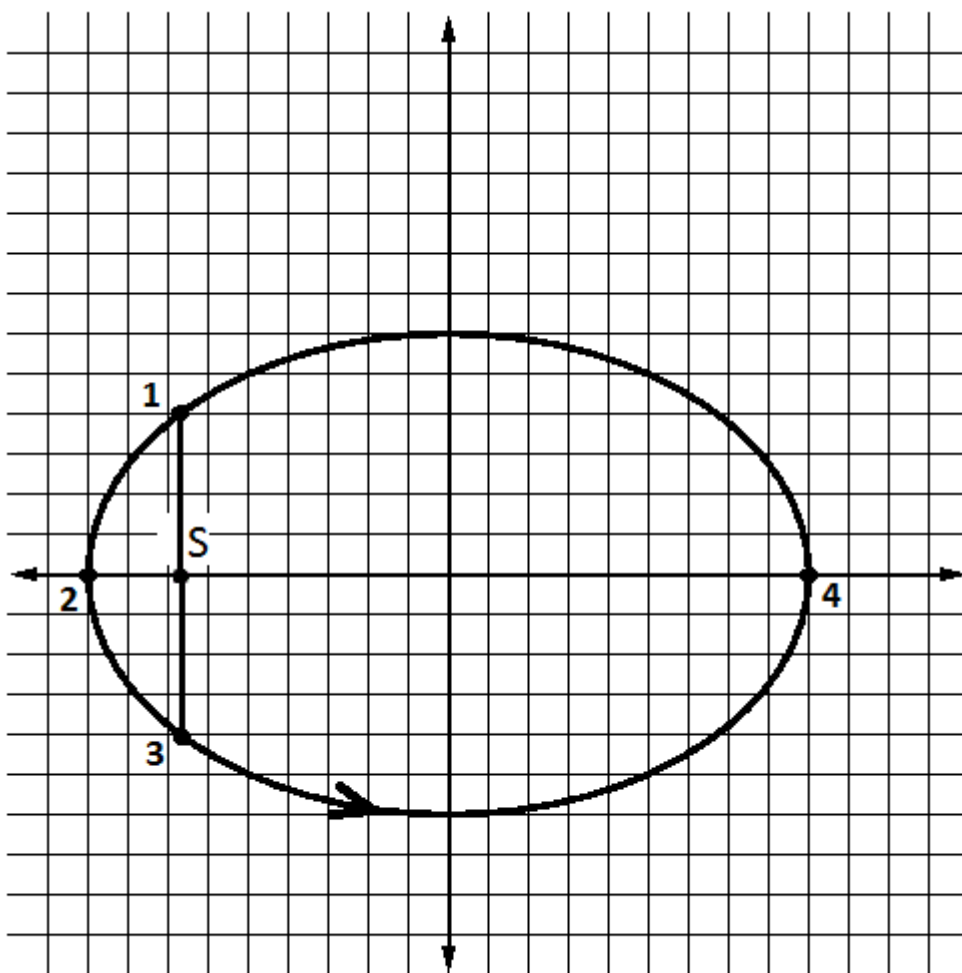
- Б) Определете приблизително продължителността на периодите между тези четири момента в дни. Пресметнете височината на звездата над хоризонта по пладне за наблюдател на екватора на планетата при равноденствията и слънцестоянията. Нарисувайте схематично графика на изменението на тази височина през годината.

- В) Пресметнете кога за наблюдател на екватора по пладне ще бъде по-топло – при равноденствията или при лятното слънцестояние.

Решение:

Щом моментът на лятното слънцестояние съвпада с момента на преминаване на планетата през перихелия, то с точките 2 и 4 са отбелязани положенията на планетата съответно при лятно и зимно слънцестояние за нейното северно полукуълбо. При нас, на Земята, сезоните се определят преди всичко от наклона на оста на нашата планета. Ексцентрицитетът на земната орбита е много малък и изменението на разстоянието Земя – Слънце в течение на годината много слабо влияе на сезоните. При разглежданата планета обаче, ситуацията е друга. Тя има значителен ексцентрицитет на орбитата си. Сезоните ще настъпват едновременно и в северното, и в южното полукуълбо на планетата. Те няма да са противоположни, както при Земята, защото ще се определят не от наклона на оста, а от силно променящото се разстояние до звездата. Наклонът на оста ще внася само допълнително влияние. За северното полукуълбо на планетата ще има много топло, може би горещо лято и много студена зима. За южното полукуълбо контрастът между лято и зима ще бъде донякъде смекчен.

През точката S, в която се намира слънцето на тази далечна планета, прекарваме права перпендикулярна на голямата ос на елиптичната орбита на планетата. Тя пресича орбитата в точките 1 и 3. Това са положенията, в които за северното полукуълбо на планетата е съответно пролетно и в есенно равноденствие. Тогава ориентацията на нейната ос спрямо слънцето е такава, че терминаторът на планетата ще минава през нейните полюси.



За да определим продължителността на сезоните на планетата ще използваме втория закон на Кеплер, според който за равни времена радиус-векторът на планетата описва равни площи от нейната елиптична орбита. За приблизително определяне на площите ще използваме квадратната мрежа и ще изразяваме тези площи в единици, равняващи се на площта на едно квадратче. Можем да оценим площта на цялата елипса като приблизително равна на $S = \pi ab \approx 170$ квадратчета.

Пролетта в северното полукукло на планетата започва, когато тя е в положение 1, и завършва, когато планетата е в положение 2. Площта на фигурата S12 е около 6 квадратчета. Също такава е и площта на фигурата S23, която съответства на продължителността на лятото. Орбиталният период на планетата е 400 дни. Като знаем това, можем да определим продължителността на пролетта:

$$T_{12} = 400 \times 6 / 170 \approx 14.1 \text{ дни}$$

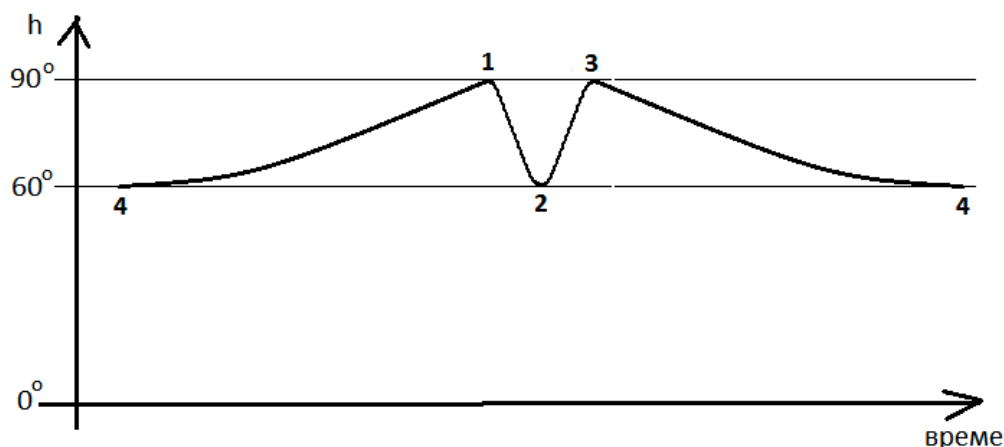
Също толкова продължава и лятото. За есента можем да пресметнем:

$$400 / 2 - 14.1 = 185.9 \text{ дни}$$

Толкова ще продължава и зимата.

За наблюдател на екватора по пладне височината на слънцето над хоризонта ще бъде 90° при двете равноденствия. За да получим височината на слънцето по пладне при слънцестоянията, трябва от 90° да извадим наклона на оста на планетата, който е 30° . Следователно височината на Слънцето ще бъде 60° . При лятното слънцестояние то ще кулминира на север, а при зимното – на юг от небесния екватор.

На графиката е показано как ще се изменя височината на Слънцето по пладне през годината. С 1, 2, 3 и 4 са означени същите моменти, както и на елиптичната орбита на планетата.



За да определим кога ще бъде по-топло за наблюдател на екватора на планетата – дали в равноденствие или в лятно слънцестояние, трябва да сравним влиянието на два фактора – разстоянието от планетата до слънцето и ъгъла на падане на слънчевите лъчи. На фигурата с орбитата на планетата измерваме разстоянията от планетата до слънцето в двата случая. Количеството лъчиста енергия, което се получава от слънцето, е обратно пропорционално на квадрата на разстоянието. Намираме квадрата на отношението на двете разстояния и то е 1.89. В перихелия осветеността, създавана от слънцето върху планетата, ще бъде 1.89 пъти по-висока, отколкото в точките на равноденствие.

Осветеността е пропорционална на косинуса от ъгъла на падане на светлинните лъчи, или синуса от височината на Слънцето над хоризонта. За отношението на осветеностите при равноденствие и при лятно слънцестояние пресмятаме:

$$\sin 90^\circ / \sin 60^\circ \approx 1.15$$

Следователно влиянието на разстоянието е по-силно в този случай и на екватора по пладне ще бъде по-топло при лятното слънцестояние, отколкото при равноденствията.

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За отбелязване на точките на слънцестояния и равноденствия – 1 т.

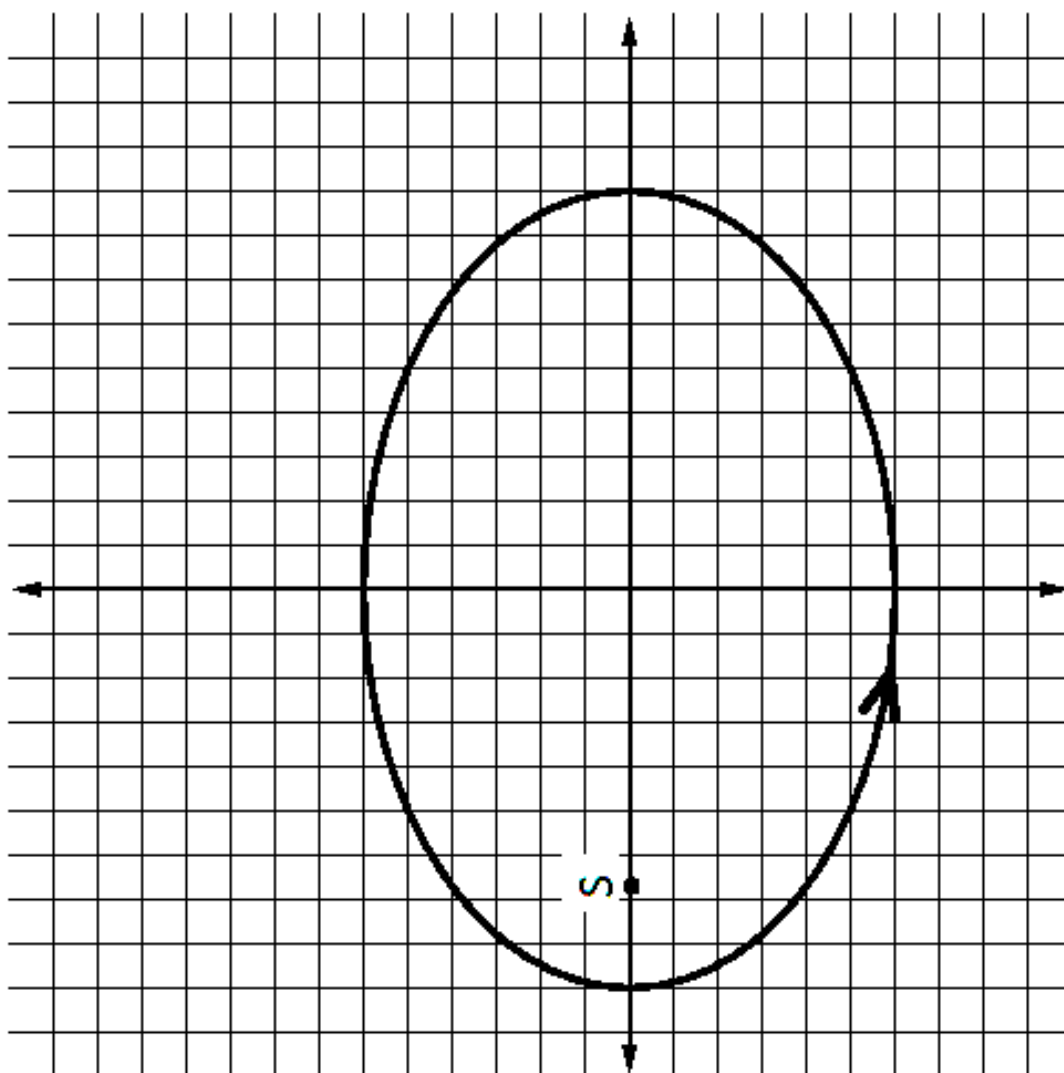
За описание на климата на планетата – 1 т.

За правилен подход при определяне на продължителността на сезоните – 2 т.

За правилни числени резултати – 1 т.

За определяне на височината на Слънцето в характерните моменти, графично представяне на изменението на височината на Слънцето и обяснение – 3 т.

За правилен метод на определяне кога ще бъде по-топло за наблюдател на екватора и числен резултат – 4 т.



Орбита на Ветровитата планета около звездата S

ОСНОВНИ АСТРОФИЗИЧНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ЗВЕЗДИТЕ

Спектр клас	Истински цветове (B-V) ₀ (U-B) ₀				Абсолютни зв. вел. M _v				Ефективни темп. T _{eff} Светимости L/L _☉			Маса M/M _☉ Радиус R/R _☉		
	Клас св.	V	III	Ia	V	III	Ib	Ia	V	III	I	V	III	I
O5		-0.33	-0.32	-0.31	-5.7	-6.3		-6.8	44500	42500	40300	60		70
		-1.19	-1.17	-1.17					790000	990000	1100000	12		30
B0		-0.30	-0.29	-0.23	-4.0	-5.1	-6.1	-6.9	30000	29000	26000	17.5	20	25
		-1.08	-1.08	-1.05					52000	110000	260000	7.4	15	30
B5		-0.17	-0.17	-0.08	-1.2	-2.2	-5.4	-7.0	15400	15000	13600	5.9	7	20
		-0.58	-0.58	-0.76					830	1800	52000	3.9	8	50
A0		-0.02	-0.03	0.02	0.6	0.0	-5.2	-7.1	9520	10100	9700	2.9	4	16
		-0.02	-0.07	-0.44					54	106	35000	2.4	5	60
A5		0.15	0.15	0.09	2.0	0.7	-5.1	-7.4	8200	8100	8510	2.0		13
		0.10	0.11	-0.10					14	43	35000	1.7		60
F0		0.30	0.30	0.17	2.7	1.5	-5.1	-8.0	7200	7150	7700	1.6		12
		0.03	0.08	0.15					6.5	20	32000	1.5		80
F5		0.44	0.43	0.31	3.5	1.6	-5.1	-8.0	6440	6470	6900	1.4		10
		-0.02	0.09	0.27					3.2	17	32000	1.3		100
G0		0.58	0.60	0.75	4.4	1.0	-5.0	-8.0	6030	5850	5550	1.05	10	10
		0.06	0.21	0.52					1.5	34	30000	1.1	6	120
G5		0.68	0.86	1.03	5.1	0.9	-4.6	-7.9	5770	5150	4850	0.92	1.1	12
		0.20	0.56	0.82					0.79	43	29000	0.92	10	150
K0		0.81	1.00	1.25	5.9	0.7	-4.3	-7.7	5250	4750	4420	0.79	1.1	13
		0.45	0.84	1.18					0.42	60	29000	0.85	15	200
K5		1.15	1.50	1.60	7.4	-0.2	-4.4	-7.5	4350	4000	3850	0.67	1.5	13
		1.08	1.81	1.80					0.15	220	38000	0.72	25	400
M0		1.40	1.56	1.67	8.8	-0.4	-4.5	-7.0	3850	3800	3650	0.51	1.2	13
		1.22	1.87	1.90					0.077	330	41000	0.60	40	500
M5		1.64	1.63	1.60	12.3	-0.5	-4.8	-6.8	3240	3330	2800	0.21		24
		1.24	1.58						0.011	930	300000	0.27		